

**Etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026. Clasa a X-a (Barem de notare și evaluare)**

○ *Orice soluție corectă, diferită de cea sugerată în barem, se punctează corespunzător.*

	<b>Din oficiu.</b>	<b>10 p</b>
<b>1.</b>	Notăm, pentru a simplifica redactarea, $p = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ și din $2^x = 3 \cdot 4 \cdot 5$ se obține $x = \log_2(3 \cdot 4 \cdot 5)$	8 p
	Egalitatea anterioară conduce la $1 + x = \log_2 2 + \log_2(3 \cdot 4 \cdot 5) = \log_2 p$ , deci $\frac{1}{1+x} = \log_p 2$ și analoagele.	7 p
	În final $A = \log_p p = 1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ .	7 p
	<b>Total Problema 1.</b>	<b>22 p</b>
<b>2.</b>	Se demonstrează imediat inductiv că $a_n < \sqrt[3]{8} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .	16 p
	Pe de altă parte, cum $a_n > 0$ , avem $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_n^3 - a_n - 6 = (a_n - 2) \cdot (a_n^2 + 2a_n + 3) < 0$ , adevărat, așadar șirul este strict crescător	5 p
	Concluzie: $a_1 < a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul este mărginit.	1 p
	<b>Total Problema 2.</b>	<b>22 p</b>
<b>3.</b>	(a) cum $x_V = 2, y_V = -1$ , putem lua $A = [2, +\infty), B = [-2, +\infty)$ . Funcția este strict crescătoare pe $A$ , deci este injectivă; $\text{Im } f = [-1, +\infty) \neq B = [-2, +\infty)$ , așadar funcția nu este surjectivă.	12 p
	(b) Se arată că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x \in (1, +\infty)$ astfel încât $g(x) = n$ .	1 p
	○ Dacă $n = 0$ se poate alege orice $x \in (\sqrt{3}, 2)$ .	2 p
	○ Dacă $n = 1$ putem lua $x = \frac{3}{2}$ .	2 p
	○ Dacă $n \geq 2$ avem că $x = \sqrt[n]{\frac{3}{2}}$ verifică egalitatea $\log_x 3 - \log_x 2 = n$ . Aceasta este echivalentă cu $[\log_x 3] - [\log_x 2] + \{\log_x 3\} - \{\log_x 2\} = n$ , deci $\{\log_x 3\} - \{\log_x 2\} \in \mathbb{Z}$	6 p

	și astfel egalitatea $\{\log_x 3\} = \{\log_x 2\}$ , care asigură egalitatea $g(x) = n$ .	
	<b>Total Problema 3.</b>	<b>23 p</b>
<b>4.</b>	<p>(a) considerând <math>\alpha = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}</math> avem <math>T = \{1, \alpha, \alpha^2\}</math> cu <math>1 + \alpha + \alpha^2 = 0</math> și <math> 1  =  \alpha  =  \alpha^2  = 1</math>.</p>	8 p
	<p>(b) Notăm <math> a  =  b  =  c  = R &gt; 0</math> și astfel, folosind <math>R^2 = a \cdot \bar{a}</math>, <math>\bar{a} = \frac{R^2}{a}</math> și analoagele, se ajunge la <math>0 = a + b + c = \overline{a + b + c} = R^2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = R^2 \cdot \left( \frac{ab + bc + ca}{abc} \right)</math>,  <math>ab + bc + ca = 0</math>.</p>	6 p
	<p>Pe de altă parte avem și <math>(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + bc + ca) = 0</math>, deci <math>a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca = 0</math>.</p>	5 p
	<p>Această ultimă egalitate conduce la <math>(a - b)^2 = (b - c) \cdot (c - a)</math>, de unde <math> a - b ^2 =  b - c  \cdot  c - a </math>.</p> <p>Notăm imaginile geometrice ale numerelor <math>a, b, c</math> cu <math>A, B, C</math>.</p> <p>Rezultă <math>AB^2 = BC \cdot AC</math>; analog: <math>BC^2 = AB \cdot AC</math> și <math>CA^2 = BC \cdot BA</math>. Însușind aceste ultime trei egalități se ajunge la <math>(AB - BC)^2 + (AB - CA)^2 + (CA - BC)^2 = 0</math>.</p> <p>În concluzie: <math>AB = BC = CA</math>, deci triunghiul este echilateral.</p>	4 p
	<b>Total Problema 4.</b>	<b>23 p</b>